Matematika 2 – java e gjashtë.

Seminaret.

1. Të gjendet shifra e panjohur e numrit $512x$, ashtu që ky numër të plotpjestohet me 6.
2. Të gjenden shifrat e panjohura të numrit $1y2x6$, ashtu që ky numër të plotpjestohet me 12.
3. Të gjenden shifrat e panjohura të numrit $20y31x$, ashtu që ky numër të plotpjestohet me 45.
4. Të gjenden shifrat e panjohura të numrit $1ab02xy$, ashtu që ky numër të plotpjestohet me 225.
5. Të gjenden shifrat e panjohura të numrit $34x5y$, ashtu që ky numër të plotpjestohet me 36.
6. Shqyrtoni plotpjestueshmërinë e numrit $25 \cdot 10^{25} + 24 \cdot 10^{112} + 17$ me numrat 3, 6 dhe 9.
7. A plotpjestohen numrat:

   a) $2 \cdot 10^n + 1$, ku $n \in \mathbb{N}$.
   b) $5 \cdot 10^{100} + 6 \cdot 10^{15} + 5 \cdot 10^4 + 2$

   me numrat 3, 6 dhe 9?
8. Vërtetoni që numri natyror n plotpjestohet me numrin 7, atëherë dhe vetëm atëherë kur diferenca e numrit që përftohet nga numri n duke i hequr shifrën e fundit dhe e numrit I cili është i barabartë me dyfishin e shifrës së fundit të numrit n, plotpjestohet me numrin 7.

Zgjidhjet:

1. Duhet të gjejmë shifrën x ashtu që numri $512x$ te plotpjestohet me numrin 2 dhe me numrin 3. Që të plotpjestohet një numër me numrin 2 duhet dhe mjafton që shifra e fundit e tij të jetë çift. Pra $x \in \{0,2,4,6,8\}$. Që të plotpjestohet një numër me numrin 3 duhet dhe mjafton që shuma e shifrave të tij të plotpjestohet me 3. Pra $5+1+2+x = 8+x \mid 3$. Nga këtu kemi $x \in \{1,4,7\}$. Përfundimisht $x \in \{0,2,4,6,8\} \cap \{1,4,7\} = \{4\}$. Pra $x = 4$ dhe numri është 5124.

2. Një numër natyror plotpjestohet me 12, atëherë dhe vetëm atëherë kur ai plotpjestohet me 3 dhe me 4. Që të plotpjestohet numri $1y2x6$ me numrin 4, duhet dhe mjafton që numri që formohet nga dy shifrat e fundit të plotpjestohet me 4. Pra numri $x6 \mid 4$ dhe kjo implikon $x \in \{1,3,5,7,9\}$. Që të plotpjestohet numri $1y2x6$ me numrin 3, duhet dhe mjafton që $1+y+2+x+6 = 9+x+y \mid 3$. Tani marrim rastet:
   - $x = 1 \Longrightarrow 10 + y \mid 3 \Longrightarrow y \in \{2,5,8\}$. Numrat janë: 12216, 15216 dhe 18216.
   - $x = 3 \Longrightarrow 12 + y \mid 3 \Longrightarrow y \in \{0,3,6,9\}$. Numrat janë: 10236, 13236, 16236 dhe 19236.
   - $x = 5 \Longrightarrow 14 + y \mid 3 \Longrightarrow y \in \{1,4,7\}$. Numrat janë: 11256, 14256 dhe 17256.
   - $x = 7 \Longrightarrow 16 + y \mid 3 \Longrightarrow y \in \{2,5,8\}$. Numrat janë: 12276, 15276 dhe 18276.
   - $x = 9 \Longrightarrow 18 + y \mid 3 \Longrightarrow y \in \{0,3,6,9\}$. Numrat janë: 10296, 13296, 16296 dhe 19296.

3. Një numër natyror plotpjestohet me 45, atëherë dhe vetëm atëherë kur ai plotpjestohet me 5 dhe me 9. Që të plotpjestohet numri $20y31x$ me numrin 5, duhet dhe mjafton që shifra e fundit e numrit $20y31x$ të jetë 0 ose 5. Që të plotpjestohet një numër me numrin 9 duhet dhe mjafton që shuma e shifrave të tij të plotpjestohet me 9. Pra $2+0+y+3+1+x=6+x+y \mid 9$. Tani shqyrtojme dy rastet:
   - $x=0 \Longrightarrow 6+y \mid 9 \Longrightarrow y \in \{3\}$. Numri është: 203310.
   - $x=5 \Longrightarrow 11+y \mid 9 \Longrightarrow y \in \{7\}$. Numri është: 207315.

4. Një numër natyror plotpjestohet me 225, atëherë dhe vetëm atëherë kur ai plotpjestohet me 25 dhe me 9 meqënëse 225=25·9. Që të plotpjestohet një numër me numrin 25 duhet dhe mjafton që numri që formohet nga dy sifrat e fundit të tij të jetë 00,25,50 ose 75.
   Pra $1ab02xy \mid 25 \iff x=0, y=0\,;\ x=2, y=5\,;\ x=5, y=0\,;\ x=5, y=0$. Shqyrtojmë rastet:
   - $x=0, y=0 \Longrightarrow 1ab0200 \mid 9 \Leftrightarrow a+b+3 \mid 9 \Leftrightarrow a+b \in \{6{,}15\}$. Duke shqyrtuar të gjitha situatat e mundshme fitojmë numrat: $1060200{,}1150200{,}1240200{,}1330200{,}1420200{,}1510200{,}1600200$ dhe $1690200{,}1780200{,}1870200{,}1960200$.
   - $x=2, y=5 \Longrightarrow 1ab0225 \mid 9 \Leftrightarrow a+b+10 \mid 9 \Leftrightarrow a+b \in \{8{,}17\}$. Duke shqyrtuar të gjitha situatat e mundshme fitojmë numrat: $1080225{,}1170225{,}1260225{,}1350225{,}1440225{,}1530225{,}1620225{,}1710225$, 1800225 dhe $1890225{,}1980225$.
   - $x=5, y=0 \Longrightarrow 1ab0250 \mid 9 \Leftrightarrow a+b+8 \mid 9 \Leftrightarrow a+b \in \{1{,}10\}$. Duke shqyrtuar të gjitha situatat e mundshme fitojmë numrat: $1010250{,}1100250$ dhe $1190250, 1280250, 1370250, 1460250, 1550250, 1640250, 1730250, 1820250, 1910250$.
   - $x=7, y=5 \Longrightarrow 1ab0275 \mid 9 \Leftrightarrow a+b+15 \mid 9 \Leftrightarrow a+b \in \{3{,}12\}$. Duke shqyrtuar të gjitha situatat e mundshme fitojmë numrat: $1003275, 1120275, 1210275, 1300275$ dhe $1390275, 1480275, 1570275, 1660275, 1750275, 1840275, 1930275$.

5. $34x5y \mid 36$ dhe $36=4\cdot 9$ atëherë mjafton të jetë $34x5y \mid 4$ dhe $34x5y \mid 9$. Nga plotpjestueshmeria me 4 kemi $5y \mid 4$. Kjo edhe mjafton. Pra $y \in \{2{,}6\}$. Nga plotpjestueshmeria me 9 kemi $3+4+5+x+y=12+x+y \mid 9$. Kjo edhe mjafton. Për $y=2$ kemi $14+x \mid 9$ nga ku fitojmë numrin 34452 dhe për $y=6$ kemi $18+x \mid 9$ nga ku fitojmë numrat 34056 dhe 34956.

6. Numri $a=25\cdot 10^{25}+24\cdot 10^{112}+17=2400\ldots 02500\ldots 017$ është numër tek dhe e ka shumën e shifrave $2+4+2+1+7=21$. Numri a është tek prandaj nuk plotpjestohet me 6. Meqënëse $21 \mid 3$ atëherë numri $a \mid 3$. Meqënëse $21 \nmid 9$ atëherë numri $a \nmid 9$.

7. Për pikën a) kemi $2\cdot 10^n+1=20\ldots 01$ pra është numër tek dhe shumën e shifrave e ka të barabartë me 3. Kështu plotpjestohet me 3, nuk plotpjestohet me 6 dhe nuk plotpjestohet me 9. Për pikën b) kemi numrin $a=5\cdot 10^{100}+6\cdot 10^{15}+5\cdot 10^4+2=50\ldots 060\ldots 050002$ i cili është çift dhe e ka e ka shumën e shifrave të barabartë me 18. Nga këtu kemi që ky numër plotpjestohet me 3, me 6 dhe me 9.

8. Le të jetë $n=a_k a_{k-1}\cdots a_2 a_1 a_0$ i paraqitur përmes shifrave. Shënojmë $m=a_k a_{k-1}\cdots a_2 a_1$ dhe $s=2a_0$. Duhet të vërtetojmë që $n \mid 7$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $m-s \mid 7$. Kemi barazimin:
   $m-s=a_k a_{k-1}\cdots a_2 a_1-2a_0=\frac{a_k a_{k-1}\cdots a_2 a_1 0-20a_0}{10}=\frac{a_k a_{k-1}\cdots a_2 a_1 a_0-21a_0}{10}=\frac{n-21a_0}{10}$. Nga këtu rrjedh barazimi $10(m-s)=n-21a_0$ ose $n=10(m-s)+21a_0$.

   Tani n.q.s. $m-s \mid 7$ atëherë $m-s=7u \Longrightarrow n=70u+21a_0=7(10u+3a_0) \mid 7$.

   N.q. s $n \mid 7$ atëherë $n=7u \Longrightarrow 10(m-s)=7u-21a_0=7(u-3a_0) \Longrightarrow m-s \mid 7$.